UNIVERSAL LIBRARY

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

XLIV

CENTRE INTERNATIONAL DE SYNTHÈSE

Deuxième Semaine de Synthèse

LA RELATIVITÉ

Série d'Exposés et de Discussions dirigée par

PAUL LANGEVIN

Professeur au collège de France

V

LE PARALLÉLISME ABSOLU
ET LA
THÉORIE UNITAIRE DU CHAMP

PAR

ÉLIE CARTAN

PROFESSEUR A LA SORBONNE



PARIS

HERMANN ET Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1932



LE PARALLÉLISME ABSOLU ET LA THÉORIE UNITAIRE DU CHAMP



Les premières tentatives pour édifier une théorie unitaire du champ gravitationnel et du champ électromagnétique remontent au lendemain même de la création de la relativité générale. La théorie de M. Einstein, réduite à ce qu'elle a d'essentiel, ramenait à la Géométrie la théorie physique de la gravitation dans le vide. L'espace-temps était assimilé à une variété riemannienne à quatre dimensions, dont la courbure expliquait les dérogations apparentes au principe d'inertie produites par la gravitation; quant aux lois mêmes de la gravitation, elles s'expliquaient par certaines restrictions géométriques imposées au schéma général de variété riemannienne à quatre dimensions, restrictions qui se traduisaient analytiquement par les dix équations célèbres d'Einstein.

Dans cette théorie il n'y avait pas de place pour le champ électromagnétique, pour l'électricité et pour la matière. On arrivait à la vérité à trouver la matière, considérée comme génératrice du champ de gravitation, mais à l'état de singularité ponctuelle de l'espace-temps. En ce qui concerne l'Électromagnétisme, les équations de Maxwell ne pouvaient se rattacher, ni de près ni de loin, à aucune propriété géométrique d'une variété riemannienne; seul le tenseur d'énergie électromagnétique était susceptible d'une interprétation géométrique riemannienne.

Le succès même obtenu par M. Einstein dans la théorie du

champ gravitationnel pur devait conduire à la recherche d'une théorie plus complète. Tous ceux qui ont attaqué le problème se sont placés essentiellement au même point de vue que M. Einstein : trouver un schéma géométrique réalisant, pour le champ de gravitation, le champ électromagnétique, l'électricité et la matière, ce que la relativité générale avait réalisé pour le seul champ de gravitation dans le vide. M. H. Weyl le premier l'a fait, en concevant une variété métrique dans laquelle il n'existerait aucune unité de longueur absolue, ou plutôt dans laquelle les unités de longueur choisies par différents observateurs pourraient se comparer de proche en proche, le résultat de la comparaison variant pour deux observateurs donnés avec le choix des observateurs intermédiaires. Notre intention n'est ici ni d'étudier la théorie de Weyl, ni de faire l'historique des essais qui l'ont suivie. Nous nous en tiendrons aux dernières tentatives de M. Einstein, fondées sur la notion d'espace riemannien à parallélisme absolu. Certaines des observations que nous serons conduit à formuler se rapporteront, du reste, au principe même des théories de géométrisation de la Physique.

I

La géométrie riemannienne est, comme on sait, une généralisation de la géométrie élémentaire ou euclidienne. Riemann l'a fondée en détachant de la géométrie la notion de distance, et en se donnant *a priori*, pour définir la distance de deux points infiniment voisins, une expression analytique analogue à celle que fournit le théorème de Pythagore, mais plus générale. La possibilité d'édifier sur de telles données une théorie géométrique conservant au moins une partie des notions géométriques euclidiennes nous est garantie par la remarque suivante : c'est que la donnée, en géométrie élémentaire, de la distance de deux points infiniment voisins, suffit pour

reconstruire tout l'édifice de cette géométrie. Les procédés mêmes dont on se sert, en géométrie différentielle euclidienne, pour reconstruire de proche en proche un espace euclidien donné par son ds^2 (1) en coordonnées curvilignes peuvent encore être employés en partie lorsqu'il s'agit d'un ds^2 quelconque; c'est ainsi qu'on peut arriver à la notion si importante du *parallélisme* introduite par M. Levi-Civita ; grâce à elle il est possible de dire que deux directions d'origines *infiniment voisines* sont ou ne sont pas parallèles, font entre elles tel ou tel angle. On sait quelle est l'importance physique de cette notion dans la relativité générale : un point matériel de masse très faible, placé dans le vide à l'intérieur d'un champ de gravitation, se déplace de manière que le vecteur d'Univers qui représente sa quantité de mouvement et son énergie reste constamment parallèle ou plutôt *équipollent* à lui-même : autrement dit, il obéit à la loi d'inertie. Le parallélisme de M. Levi-Civita est lié *(vincolato)*, en ce sens que si un vecteur se déplace par parallélisme, de manière que son origine aille d'un point A à un point B, la position finale du vecteur dépend du chemin suivi pour aller de A à B : le transport parallèle n'est pas intégrable.

La géométrie riemannienne, complétée par la découverte de M. Levi-Civita, a été utilisée telle quelle par M. Einstein dans sa théorie de la relativité générale (2). On pouvait cependant remarquer que rien n'obligeait à penser que cette géométrie répondait à la réalité physique. Partons, en effet, de l'hypothèse, qu'il est bien difficile de ne pas admettre, que notre espace, sans être euclidien, peut, dans toute région suffisamment petite, être assimilé à un espace euclidien. Imaginons des physiciens à mentalité euclidienne; chacun d'eux, s'il observe dans son

(1.) Le ds^2 est l'expression qui donne le carré de la distance de deux points infiniment voisins.

(2.) En réalité, la découverte de M. Levi-Civita est postérieure à la relativité générale, mais la notion de parallélisme a servi à la rendre beaucoup plus intuitive.

voisinage immédiat, adoptera naturellement un système de coordonnées rectangulaires à l'origine duquel il se trouvera placé. Si deux physiciens voisins veulent coordonner leurs observations, il faudra que le premier sache localiser, par rapport à son système de référence, le système de référence du second. Il le fera par des procédés physiques sur la nature desquels nous n'avons pas à entrer et qui lui permettront de dire :

1° Que l'origine du second trièdre a telles coordonnées par rapport au premier;

2° Que les axes du second trièdre font tels angles avec les axes du premier.

La physique fournira donc :

1° La distance de deux points infiniment voisins, autrement dit le ds^2 de l'espace;

2° L'angle de deux directions issues de deux points infiniment voisins, autrement dit la loi suivant laquelle un vecteur se transporte parallèlement à lui-même de proche en proche.

Nous retrouvons donc ici les deux notions fondamentales de distance et de direction, mais ces deux notions paraissent ici indépendamment l'une de l'autre. Il n'y a, en effet, aucune raison *a priori*, autre qu'une raison de simplicité géométrique, de penser que le transport parallèle fourni par l'observation physique coïncide avec le transport parallèle qui se déduit du ds^2 de l'espace suivant la loi de M. Levi-Civita. Le schéma géométrique que la logique même nous impose pour essayer de retrouver les lois de la Physique doit donc être plus général que celui de la géométrie riemannienne classique, puisque, le ds^2 de l'espace étant donné, on peut imaginer encore une infinité de lois distinctes de transport parallèle.

II

M. Einstein, dans ses derniers essais sur la théorie unitaire du champ, ne s'est pas placé à un point de vue aussi général

que le précédent. Il admet que la position finale d'un vecteur, transporté par parallélisme de manière que son origine aille d'un point A à un point B, ne dépend pas du chemin intermédiaire suivi, autrement dit que le transport parallèle est intégrable, ou encore que l'angle de deux vecteurs dont les origines sont quelconques a une signification absolue : c'est le *parallélisme absolu* (Fernparallelismus).

Il est facile de se rendre compte de la manière la plus générale de définir un parallélisme absolu dans un espace riemannien donné. Attachons, en effet, aux différents points de l'espace des systèmes de référence ou repères rectangulaires et cela suivant une loi arbitraire; il suffit alors de convenir que deux vecteurs d'origines quelconques A et B sont parallèles, ou plutôt équipollents, s'ils ont mêmes projections sur les axes des systèmes de référence d'origines A et B; ces systèmes de référence seront eux-même parallèles. Il y a donc, dans un espace riemannien donné, une infinité de parallélismes absolus possibles, puisque la loi suivant laquelle on attache à un point de l'espace un repère rectangulaire est tout à fait arbitraire; mais il importe de remarquer que si on fait tourner tous les repères rectangulaires autour de leurs origines de la même manière, on obtient le même parallélisme absolu; par suite, on peut se donner une fois pour toutes le repère attaché à un point particulier de l'espace.

On pourrait encore arriver à la notion d'espace riemannien à parallélisme absolu en suivant une marche inverse de la précédente. On définira d'abord un parallélisme absolu dans une variété *amétrique* à n dimensions en attachant aux différents points M de cette variété des repères cartésiens formés de n vecteurs d'origine M et en convenant de dire que deux vecteurs d'origines M et M′ sont équipollents s'ils ont mêmes projections sur les vecteurs de coordonnées attachés à M et M′. On introduira ensuite la métrique en convenant, par exemple, que le carré de la distance de deux points *infiniment*

voisins M et M′ est égal à la somme des carrés des projections du vecteur MM′ sur les vecteurs de coordonnées d'origine M. On pourrait avoir naturellement une métrique différente si, tout en conservant le parallélisme précédemment défini, on attachait aux différents points de l'espace un système d'autres repères cartésiens équipollents entre eux.

On voit, par ce qui précède, que la métrique et le parallélisme sont dépendants l'un de l'autre, mais que chacun peut être défini arbitrairement ; la métrique étant donnée, il y a une infinité de parallélismes absolus compatibles avec cette métrique ; le parallélisme absolu étant donné, il y a une infinité de métriques compatibles avec ce parallélisme absolu.

Dans la géométrie riemannienne classique, la notion de *courbure riemannienne* joue un rôle fondamental; elle est liée à la déviation que subit un vecteur quand on le transporte par parallélisme en faisant décrire à son origine un circuit fermé ou cycle. Cette notion, envisagée du point de vue précédent, disparaît dans le nouveau schéma einsteinien, puisque le parallélisme a une signification absolue : on peut dire que *l'espace riemannien à parallélisme absolu n'a pas de courbure*. Il y a cependant quelque chose qui différencie un tel espace de l'espace euclidien, c'est sa *torsion*.

Pour faire comprendre nettement cette notion nouvelle, rappelons des propriétés bien connues. On sait qu'en géométrie ordinaire les coordonnées d'un point M rapporté à un système d'axes rectangulaires d'origine O sont les projections sur ces axes du vecteur $\overrightarrow{OM}$; on peut encore les obtenir en liant O à M par une ligne brisée et faisant les sommes des projections des différentes parties de cette ligne. On peut même prendre une ligne courbe, regardée comme limite d'une ligne brisée. Imaginons maintenant un observateur placé dans un espace riemannien à parallélisme absolu, mais ayant une mentalité euclidienne. Si cet observateur, placé en O et adoptant un système d'axes rectangulaires d'origine O, veut

calculer les coordonnées qu'il doit attribuer à un point M, il liera O à M par une ligne continue et procédera comme nous l'avons fait tout à l'heure : il regardera la ligne OM comme la somme géométrique d'un très grand nombre de petits vecteurs ; il les transportera en O parallèlement à eux-mêmes et fera leur somme géométrique : il trouvera ainsi un vecteur d'origine O qu'il considérera comme équipollent à la ligne OM et dont les projections sur les axes seront les coordonnées qu'il cherche. Mais si l'observateur joint O à M par une autre ligne, il sera conduit à la considérer comme équipollente à un second vecteur, *qui ne sera pas en général le même que le premier vecteur.* Autrement dit, les différentes lignes joignant O à M ne sont pas toutes équipollentes au même vecteur.

On peut présenter les choses autrement. Si on considère en géométrie euclidienne un contour fermé ou cycle C parcouru dans un certain sens, il est équipollent à un vecteur nul d'après un théorème fondamental de la théorie des vecteurs ; dans un espace riemannien à parallélisme absolu, il n'en est plus de même : le cycle C est équipollent à un certain vecteur qu'on appelle le *vecteur de torsion* du cycle. Il n'y a que l'espace euclidien dont tous les cycles aient un vecteur de torsion nul.

La notion de torsion peut aussi s'introduire dans un espace riemannien à parallélisme non absolu, mais il est plus difficile de l'expliquer dans ce cas général. Contentons-nous de signaler que l'espace riemannien classique, avec parallélisme à la Levi-Civita, est doué d'une courbure, mais n'a pas de torsion ; le nouvel espace einsteinien est, au contraire, doué d'une torsion, mais n'a pas de courbure,

On conçoit que l'expression analytique de la torsion d'un espace fasse intervenir un tenseur à trois indices. En effet, tout cycle peut se décomposer en parallélogrammes élémentaires ; d'autre part, le vecteur de torsion d'un tel parallélogramme fait intervenir trois directions, celles des côtés du

parallélogramme et celle du vecteur de torsion lui-même; à chacune de ces trois directions correspond une série d'indices. En réalité, le vecteur de torsion d'un parallélogramme infiniment petit est proportionnel à l'aire de ce parallélogramme et c'est le facteur de proportionnalité qui intervient dans le tenseur de torsion Λ^{k}_{ij}.

Les différentes composantes de la torsion ne sont pas des fonctions absolument quelconques; elles satisfont à certaines identités dont il nous suffira d'indiquer la signification géométrique. Considérons dans l'espace un volume à trois dimensions; décomposons la surface fermée qui le limite en un très grand nombre de petites aires, limitées elles-mêmes par des cycles parcourus tous dans le même sens : la somme géométrique des vecteurs de torsion de tous ces cycles est nulle. Ce théorème est un cas particulier du théorème général de la conservation de la courbure et de la torsion.

III

Abordons maintenant le problème de la théorie unitaire basée sur la notion d'espace riemannien à parallélisme absolu. D'après la conception générale de M. Einstein, il ne peut rien se passer dans un Univers rigoureusement euclidien. Un tel Univers est même physiquement impossible : sa métrique ne peut être produite que par la présence de corps matériels, et l'existence de ces corps suffit pour que l'Univers ne soit plus rigoureusement euclidien. Or *toutes les propriétés géométriques intrinsèques qui caractérisent un espace riemannien à parallélisme absolu découlent de sa torsion* et s'expriment analytiquement au moyen des composantes du tenseur de torsion et de leurs dérivées covariantes des différents ordres. Si donc la Physique est géométrisable, c'est que toutes les lois physiques doivent pouvoir s'exprimer par des équations aux dérivées partielles entre les composantes de la torsion. Il est,

d'autre part, naturel d'admettre que toutes les lois physiques sont des conséquences logiques d'un nombre fini d'entre elles. Les problèmes que pose la théorie unitaire sont donc les suivants :

Problème A. — *Par quelles équations aux dérivées partielles E faut-il restreindre le schéma général d'espace riemannien à parallélisme absolu pour obtenir une image fidèle de l'Univers physique ?*

Problème B. — *Intégrer les équations E et retrouver, dans les solutions obtenues, la matière, l'électricité, le champ gravitationnel-électromagnétique, dans les différentes manifestations que l'expérience nous révèle.*

IV

Occupons-nous d'abord du problème A. Il ne peut se résoudre, semble-t-il, que grâce à la connaissance préalable des lois physiques. Cela est vrai, mais dans une mesure beaucoup plus faible qu'on ne pourrait le penser *a priori*. En effet, aux conditions logiques imposées par la nature même de la question et aux conditions de simplicité analytique qu'il est raisonnable d'admettre, il suffit d'ajouter une seule condition tirée du déterminisme physique pour que le problème A n'admette qu'un nombre très restreint de solutions, de sorte que le physicien, si la tentative de M. Einstein n'est pas vaine, n'aura plus qu'à choisir entre un petit nombre d'Univers construits par voie purement déductive.

Passons rapidement en revue les conditions auxquelles nous avons fait allusion et que doivent vérifier les équations E.

1° *Conditions logiques.* — Les équations E doivent évidemment exprimer des propriétés géométriques intrinsèques de l'espace. Pour les écrire effectivement, on pourra — et c'est le procédé le plus simple — attacher aux différents points de l'espace

des repères rectangulaires tous équipollents entre eux. Les équations E s'exprimeront alors par des relations entre les composantes de la torsion rapportée à ces repères et leurs différentes dérivées. Mais ces relations devront rester les mêmes si l'on choisit d'une autre manière les repères, tous équipollents entre eux, attachés aux différents points de l'espace, sans quoi les équations E exprimeraient des propriétés particulières des repères choisis, plutôt que des propriétés intrinsèques de l'espace.

La dernière condition énoncée peut être entendue dans un sens large ou restreint. Il existe, comme on sait, dans l'espace ordinaire, deux catégories distinctes de trièdres, les trièdres directs et les trièdres inverses : un trièdre inverse peut s'obtenir comme l'image dans un miroir d'un trièdre direct. Il y a une distinction analogue dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. On peut alors imaginer un système d'équations E qui garderaient leur forme pour tous les systèmes de référence rectangulaires directs, mais qui changeraient de forme pour les repères inverses. Un tel système correspondrait à un Univers dans lequel l'ensemble des lois du champ gravitationnel-électromagnétique jouirait d'une espèce de polarisation : si on considère, par exemple, un système de charges électriques et leur évolution dans un certain intervalle de temps, cette évolution serait impossible si on renversait le sens de la durée : la Physique serait *irréversible*. La théorie classique ne présente rien de pareil ; mais il n'est pas interdit de penser que l'irréversibilité de la Physique échappe à notre expérience, à cause de la faiblesse des champs qui entrent dans notre domaine immédiat d'observation.

On peut aussi se demander si les équations E sont indépendantes du choix de l'unité de longueur ; dans ce cas, elles doivent satisfaire à certaines conditions supplémentaires d'homogénéité. On s'astreindra ou non à respecter cette homogénéité suivant qu'on admettra ou non *a priori* qu'il

n'existe aucune unité de longueur, ou plutôt d'intervalle, jouant un rôle privilégié dans l'Univers.

Il faut ajouter une autre observation. Les équations E doivent dépendre à la fois de la métrique et du parallélisme, car les lois physiques font manifestement intervenir la métrique, et nous savons que la métrique seule ne suffit pas à tout expliquer. On reconnaîtrait, par exemple, que les équations E ne dépendent que du parallélisme si elles conservaient leur forme en remplaçant les repères rectangulaires choisis par tout autre système de repères *cartésiens*, rectangulaires ou non, équipollents entre eux. De même les anciennes équations de la relativité générale pourraient être écrites en introduisant dans un espace riemannien classique un parallélisme absolu, mais il est clair qu'elles exprimeraient des propriétés de l'espace indépendantes de ce parallélisme ; elles seraient donc à rejeter pour cette seule raison.

2° *Conditions de simplicité analytique.* — Ces conditions présentent, au point de vue purement logique, un très grand degré d'arbitraire. Il est naturel d'admettre, avec M. Einstein, que les équations E ne font intervenir que les dérivées du premier ordre de la torsion, et cela linéairement, la possibilité d'autres termes contenant les composantes de la torsion étant réservée ; ces termes seraient quadratiques si les équations sont homogènes au sens qui a été indiqué plus haut.

3° *Conditions de compatibilité et conditions tirées du déterminisme physique.* — Les conditions de compatibilité d'un système différentiel sont du domaine de la technique mathématique. Malgré les progrès de l'Analyse, la théorie actuelle des équations aux dérivées partielles ne permet de décider de la compatibilité d'un système que si l'on s'occupe des solutions *analytiques* de ce système, supposé lui-même formé d'équations *analytiques* (1). *A priori* il n'y a aucune raison de suppo-

(1) Le mot *analytique* a, dans cette phrase, un sens technique bien précis. Une fonction est analytique si elle est développable en une série de puissances.

ser que les lois de la Physique s'expriment au moyen de fonctions analytiques ; c'est une hypothèse que nous serons obligés de faire, faute de mieux ! Si on l'admet, on a des moyens de décider si tel système d'équations E satisfaisant aux conditions précédemment énoncées est compatible ou non. Dire qu'il est compatible, c'est simplement affirmer l'existence de solutions *analytiques* définies *localement*, c'est-à-dire dans un voisinage suffisamment petit d'un point d'Univers. Si la compatibilité, entendue dans ce sens, est nécessaire pour que les équations E puissent conduire à l'image cherchée de l'Univers, elle n'est évidemment pas suffisante ; c'est un point important sur lequel nous reviendrons plus loin.

Il ne suffit pas que les équations E soient compatibles ; il faut encore qu'elles ne soient pas en désaccord avec le déterminisme physique.

C'est là un point extrêmement important auquel on n'a pas porté l'attention voulue, dans les nombreuses discussions qui ont suivi la création de la relativité générale.

Au sens ordinaire du mot, affirmer le déterminisme physique c'est affirmer que l'état de l'Univers à un moment donné détermine complètement son évolution ultérieure. Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par *état* de l'Univers. La mécanique classique du point matériel est conforme au déterminisme, à condition d'appeler état d'un point à un instant donné l'ensemble de sa position *et de sa vitesse*. Dans toute théorie physique fondée sur des équations aux dérivées partielles, on conçoit qu'on puisse définir avec précision ce qu'il faut entendre par *état* pour que cette théorie soit conforme au déterminisme.

Ce qui complique un peu les choses, c'est précisément que la théorie de la relativité nous a appris que le temps était inséparable de l'espace ; parler de l'état de l'Univers à un instant donné n'a donc pas un sens absolu ; il faut en réalité parler de l'état de l'Univers dans une section à trois dimensions de l'espace-temps.

Mais alors se présentent d'autres difficultés sur lesquelles M. Hadamard a attiré l'attention. Il y a, en réalité, un déterminisme mathématique et un déterminisme physique. Il peut arriver que l'état de l'Univers dans la section à trois dimensions entraîne l'état de l'Univers dans les sections voisines *sans que le physicien puisse le constater* : cela tient à ce qu'une très faible variation de l'état de l'Univers dans la section donnée peut, dans certains cas, entraîner des variations énormes dans une section aussi voisine qu'on veut de la première : la dépendance des états dans les deux sections est ainsi complètement masquée au physicien. Dans l'électromagnétisme classique, il y a déterminisme mathématique pour presque toutes les sections à trois dimensions de l'espace-temps, mais il n'y a déterminisme physique que pour les sections qui, en chacun de leurs points, ne pénètrent pas à l'intérieur du cône de l'avenir relatif à ce point.

Bien entendu, les équations E sur lesquelles sera fondée la théorie du champ unitaire seront trop compliquées pour qu'on puisse étudier autre chose que le déterminisme mathématique, mais elles doivent être conformes à ce déterminisme. Si l'on borne là ses ambitions, l'état actuel de l'Analyse permet de décider si tel ou tel système d'équations E est conforme au déterminisme (1). Par exemple, on pourrait être tenté de penser que la notion même d'espace riemannien à parallélisme absolu exprime en elle-même toutes les lois du champ et qu'aucune équation restrictive n'est nécessaire ; mais cela serait contraire au déterminisme ; le schéma géométrique serait trop général.

On peut appliquer ces dernières considérations à l'ancienne théorie de la relativité générale. Dans les conceptions qu'on

(1) Bien entendu, on s'astreint à ne considérer que les solutions *analytiques* des équations E, et les états qui s'expriment par des fonctions analytiques. Sans ces restrictions, le problème mathématique deviendrait absolument inabordable.

s'en fait habituellement, tout espace riemannien à quatre dimensions est susceptible de représenter un Univers possible (privé de tout champ électromagnétique) : les régions de l'espace dans lesquelles les dix équations d'Einstein sont vérifiées sont celles où la matière n'existe pas ; quant aux autres, l'état de la matière, qui est constitué par sa densité, la vitesse de ses particules et ses pressions élastiques, n'est que la manifestation physique d'un tenseur purement géométrique de l'espace-temps. Cette conception est à rejeter, même en l'absence de tout champ électromagnétique, parce qu'elle n'est pas conforme au déterminisme. Pour connaître, en effet, l'évolution de ce fluide matériel, il faudrait non seulement connaître l'état de ce fluide à un instant donné, mais encore la distribution de ses pressions élastiques à tous les instants de la durée. Ce n'est pas à dire que la gravitation et la matière n'obéissent pas aux lois indiquées par cette théorie, mais ces lois ne sont certainement pas les seules ; on peut dire qu'on n'a pas une théorie *explicative* des phénomènes, mais tout au plus une théorie *descriptive*.

V

Revenons au problème du champ unitaire. Les conditions de différentes natures auxquelles nous voulons astreindre les équations E permettent, grâce aux restrictions plus ou moins artificielles que la commodité ou l'insuffisance de nos connaissances mathématiques nous a fait énoncer, de résoudre complètement le problème A. M. Einstein en a indiqué une solution qui comporte vingt-deux équations. Il y en a quelques autres, certaines avec quinze équations, d'autres peut-être avec seize, d'autres encore avec vingt-deux équations. On peut penser qu'il y a lieu de préférer les systèmes qui contiennent le plus grand nombre d'équations : c'est là en grande partie une affaire de sentiment. Il ne resterait alors, en présence du système de M. Einstein, qu'un autre système comportant le

même nombre d'équations et faisant intervenir deux constantes numériques absolues, *a priori* arbitraires ; un tel système correspondrait, au moins si l'une des constantes n'est pas nulle, à une Physique irréversible, mais l'irréversibilité ne se manifesterait pas en première approximation. Ce système est du reste à rejeter pour la raison suivante : il contient en particulier les dix anciennes équations de la gravitation, qui ne font intervenir que la métrique ; cela est bien invraisemblalbe, quoique logiquement possible. Il ne resterait donc, en définitive, que le système de M. Einstein, trouvé grâce à une intuition presque miraculeuse. C'est donc sur ce système que reposent les destinées de la nouvelle théorie unitaire.

VI

Nous arrivons maintenant au problème B. Il s'agit d'intégrer les vingt-deux équations d'Einstein et de retrouver le champ, la matière et l'électricité. Dans le programme qu'a esquissé M. Einstein dans ses deux conférences faites en novembre 1929 à l'Institut Henri-Poincaré, il voulait chercher les lois physiques dans les solutions *sans singularité* de ses équations, la matière et l'électricité n'existant donc qu'à l'état *continu*. Plaçons-nous sur le terrain choisi par lui, sans trop nous étonner de le voir suivre en apparence une voie opposée à celle suivie avec succès par les physiciens contemporains.

Une première difficulté se présente, de nature exclusivement mathématique. Non seulement, en effet, on n'a aucune méthode pour trouver les solutions sans singularité d'un système différentiel, mais encore il n'y a aucune raison d'admettre qu'un système, compatible au sens *local* indiqué plus haut, le soit aussi au sens *intégral*. A la vérité, on peut indiquer facilement quelques solutions sans singularité du nouveau système d'Einstein, mais ce sont des solutions isolées en

trop petit nombre pour qu'on puisse essayer de fonder sur elles une théorie physique quelconque.

Le problème se complique encore ici par suite de la circonstance suivante. Les quatre variables qui permettent de localiser un point dans l'espace-temps n'apparaissent pas dans les équations E, telles qu'elles ont été considérées plus haut; mais, dans le pratique, il faudra exprimer, au moyen de ces quatre variables, les fonctions (en nombre égal à 16) qui définissent la métrique et le parallélisme de l'Univers. Or, présenté sous cette forme, l'énoncé du problème comporte une hypothèse gratuite, à savoir qu'on peut établir une correspondance ponctuelle biunivoque entre l'espace-temps et un espace euclidien à quatre dimensions. Mais il n'y a aucune raison d'admettre que l'espace-temps jouisse des mêmes propriétés topologiques que l'espace euclidien. On peut envisager beaucoup d'autres hypothèses, par exemple que l'espace-temps est fermé. Tout ce qu'on est en droit d'exiger, c'est que les points de toute région suffisamment petite de l'Univers soient repérables par un ensemble de quatre nombres, sans qu'il existe nécessairement un repérage valable pour tout l'Univers. Tant qu'on reste au point de vue de l'intégration *locale*, les propriétés topologiques de l'Univers n'interviennent pas, mais elles doivent nécessairement jouer un rôle important et prépondérant quand on cherche une solution existant sans singularité dans tout l'espace.

On voit ainsi que la recherche des lois locales de la Physique ne peut pas être dissociée du problème cosmogonique. On ne peut, du reste, pas dire que l'un précède l'autre; ils sont inextricablement mêlés l'un à l'autre.

On a une confirmation des vues précédentes en considérant un système analogue au système d'Einstein, auquel M. Einstein avait songé, mais pour le rejeter aussitôt, avec raison, du reste. C'est le système d'équations qui exprime qu'un espace à parallélisme absolu est à torsion constante : cela signifie que

deux cycles équipollents ont leurs vecteurs de torsion équipollents, et analytiquement que les composantes Λ^k_{ij} de la torsion rapportée à des repères équipollents entre eux sont des constantes. Ce système est du reste indépendant de la métrique de l'espace. Le théorème de la conservation de la torsion montre que les constantes Λ^k_{ij} ne sont pas arbitraires, mais sont liées par certaines relations algébriques. La recherche des espaces à torsion constante n'est, sous une forme géométrique nouvelle, qu'un problème bien connu d'Analyse, car ces espaces ne sont autres que les espaces représentatifs des transformations d'un groupe fini et continu. Or l'intégration qui fournit les espaces à torsion constante donnée conduit, suivant les cas, à une ou plusieurs solutions sans singularité. Quand il y en a plusieurs, elles correspondent toutes à des espaces topologiquement distincts.

VII

Bien qu'on soit arrêté dans la solution du problème B par les difficultés mathématiques que nous venons de signaler, on peut cependant tirer des hypothèses de continuité formulées par M. Einstein des conséquences physiques importantes, qui sont, d'ailleurs, en accord avec la conception que la Physique contemporaine tend à se faire de la matière. Nous avons dit plus haut que les équations E devaient être conformes au déterminisme mathémathique, c'est-à-dire que l'état de l'Univers dans une section à trois dimensions déterminait l'état de l'Univers dans les sections voisines. Or cela peut tomber en défaut pour certaines sections particulières, qu'on appelle *caractéristiques*. Ces sections caractéristiques jouent un rôle important en Physique; par exemple, l'équation de la propagation de la lumière admet pour sections caractéristiques les sections à trois dimensions tangentes en chacun de leurs points au cône de l'avenir relatif à ce point. Or, dans la théorie unitaire

fondée sur la notion d'espace riemannien à parallélisme absolu, il est bien facile de se rendre compte *a priori*, et cela à cause précisément du caractère invariant des équations E par rapport à une rotation des repères, que les seules sections caractéristiques possibles sont celles qui sont tangentes en chacun de leurs points au cône de l'avenir relatif à ce point, et ces sections caractéristiques existent effectivement si les équations E font intervenir, comme cela est nécessaire, la métrique de l'espace. On retrouvera donc forcément les lois classiques de la propagation de la lumière comme conséquence logique du caractère métrique de l'espace.

Cette conclusion n'a rien que de naturel. Mais voici qui est plus déconcertant. Dans les théories classiques qui concernent la matière à l'état continu, par exemple dans l'Hydrodynamique, il y a d'autres sections caractéristiques que celles qui se rapportent à la propagation de la lumière, ce sont celles qui sont engendrées par les lignes d'Univers des différents points matériels qui constituent le fluide considéré ; ces lignes d'Univers jouent, pour ces sections caractéristiques, le même rôle que les rayons lumineux pour les premières, et elles en sont évidemment complètement distinctes. Comme aucune section caractéristique de ce genre ne peut se présenter dans la théorie unitaire d'Einstein, on est porté à penser que cette théorie sera obligée de nier l'individualité physique des différents points qui constituent le fluide électrique ou matériel supposé à l'état continu. Le point matériel était une abstraction mathématique dont nous avions pris l'habitude et à laquelle nous avions fini par attribuer une réalité physique. C'est encore une illusion que nous devons abandonner si la théorie unitaire du champ arrive à s'établir.

On voit, par l'exposé qui précède, la variété des aspects sous lesquels peut être envisagée la théorie unitaire du champ et aussi la difficulté des problèmes qu'elle soulève. Mais

M. Einstein n'est pas de ceux à qui les difficultés font peur et, même si sa tentative n'aboutit pas, elle nous aura forcés à réfléchir sur les grandes questions qui sont à la base de la science.

É. CARTAN.
(Sorbonne).

